

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP HÈ 2016 MÔN TOÁN- LỚP 12
(Dành cho Giáo viên và học sinh)

PHẦN I : BÀI TẬP GIẢI TÍCH
§1: TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Xét sự biến thiên của các hàm số :

1) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$

11) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$

2) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$

12) $y = \frac{1}{x+1} - 2x$

3) $y = x + \frac{3}{x}$

13) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

4) $y = x - \frac{2}{x}$

14) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

5) $y = x^4 - 2x^2 + 5$

15) $y = \frac{x+1}{x-1}$

6) $y = \sqrt{4 - x^2}$

16) $y = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$

7) $y = \frac{x^2 - 8x + 9}{x - 5}$

17) $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$

8) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

18) $y = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2}$

9) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$

10) $y = \sqrt{2x - x^2}$

Bài 2: Chứng minh rằng các hàm số sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$

2) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

3) $y = 5x - 3\sin x + 4\cos x$

4) $y = x + \cos x$

5) $y = x^3 + x - \cos x - 4$

Bài 3: Chứng minh rằng:

1) Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ là đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

2) Hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x+1}$ là nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Bài 4: Tùy theo giá trị của m hãy khảo sát sự biến thiên của các hàm số:

$$1) y = \frac{1}{2}(m^2 - 4)x^2 - (3m - 6)x + \frac{9}{2}$$

$$2) y = mx^3 - 3(m-1)x^2 + 3(m-2)x + 1$$

Bài 5:

1) Với giá trị nào của a thì hàm số $y = ax - x^3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

2) Tìm các giá trị của tham số a để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

3) Tìm m để hàm số $y = \frac{m(1-x)}{x-m}$ luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó

4) Tìm m để hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

5) Tìm a để hàm số $y = \frac{ax^2 + 6x - 2}{x+2}$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$

Bài 6: Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$1) \tan x > x$$

$$2) \sin x + \tan x > 2x$$

Bài 7:

1) Tìm các nghiệm âm của phương trình: $x^6 - 2x^5 - 3 = 0$

2) Tìm các cặp số $(x; y)$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn hệ pt:

$$\begin{cases} \tan x - \tan y = y - x \\ 2x + 7y = 3\pi \end{cases}$$

3) Giải PT: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$

Bài 8: (ĐHBK - HN - 94): CMR: Nếu $x + y = 1$ thì $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$

Bài 9: (ĐHSP II - 98) CMR: Trong mọi ΔABC nhọn ta đều có:

$$\frac{2}{3}(\sin A + \sin B + \sin C) + \frac{1}{3}(\tan A + \tan B + \tan C) > \pi$$

Bài 10: (ĐH Ngoại Thương 99): Giải phương trình

$$\sqrt{3-x+x^2} - \sqrt{2+x-x^2} = 1$$

§2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Áp dụng quy tắc 1, tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

6) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$

2) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

7) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$

3) $y = x + \frac{1}{x}$

8) $y = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$

4) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

9) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

5) $y = x^3(1 - x)^2$

10) $y = \sqrt{8 - x^2}$

Bài 2: Áp dụng quy tắc 2, tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

4) $y = x - \sin 2x + 2$

2) $y = x\sqrt{4 - x^2}$

5) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$

3) $y = \sin 2x - x$

Bài 3:

1) Xét hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm a, b, c, d, sao cho hàm số f đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; $f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1$; $f(1) = 1$.

2) Xác định các hệ số a, b, c, sao cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực trị bằng 0 tại điểm $x = -2$ và đồ thị của hàm số đi qua điểm A (1; 0).

3) Chứng minh rằng: Với mọi giá trị của m, hàm số $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$

luôn có cực đại và cực tiểu.

Bài 4:

1) Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x) = \sin 3x + a \sin x$ đạt cực trị tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$? Hãy cho biết tại điểm đó hàm số đạt cực đại hay cực tiểu?

2) Tìm m để hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 5x + 2$ đạt cực trị tại $x = 2$.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$

1) Tìm m để: a/ Hàm số có cực trị.

b/ Hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 + 2x_2 = 1$

c/ Hàm số có cực đại, cực tiểu tại điểm có hoành độ dương

d/ Hàm số có cực đại, cực tiểu và $x_{CD} < x_{CT}$

e/ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$

2) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và viết pt đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị.

Bài 6: Cho hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 + 1$

1) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu

2) Viết pt đường cong đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$. Xác định m để:

1) Hàm số có cực trị

2) Hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ thỏa mãn: $x_1 + x_2 = 4x_1x_2$

3) Hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ dương

Bài 8: (ĐHBK - Hà Nội - A - 2000)

Xác định các giá trị của m để hàm số $y = f(x) = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ không có cực trị.

Bài 9: (ĐHCSND - A - 2000)

Xác định m để hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

Bài 10: (ĐHAN - A - 1999)

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx - m + 8}{x - 1}$ ở về 2 phía của đường thẳng $9x - 7y - 1 = 0$

Bài 11: Tìm m để hàm số :

1) $y = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

2) $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Bài 12: Cho hàm số : $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$.

1) Viết PT đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số.

2) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Bài 13: (HVOHQ - 97)

Cho hàm số : $y = x^4 - 24mx^2 + 2m + m^4$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu lập thành ba đỉnh của tam giác đều.

Bài 14: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$.

- 1) Viết PT đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số.
- 2) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu nằm về hai phía của trục Ox.

Bài 15 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$.

- 1) Tìm m để hàm số có cực trị.
- 2) Tìm m để hàm số có y_{CD}, y_{CT} nhỏ nhất.

Bài 16 : (Khối A -2012) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$

Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Bài 17 : (Khối B-2013)

Cho hàm số : $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$.

Tìm m để hàm số có hai điểm cực đại, cực tiểu A, B và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Bài 18: (Khối D- 2012)

Cho hàm số : $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$.

Tìm m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho : $x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Bài 19 : (Khối B -2012)

Cho hàm số : $y = 2x^3 - 3mx^2 + 3m^3$.

Tìm m để hàm số có hai điểm cực đại, cực tiểu A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

§3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 5$ trên đoạn $[-2; 3]$

2) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$

3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$

4) $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ trên đoạn $[2; 4]$

5) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ trên đoạn $[0; 1]$

6) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 2]$

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 18x$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

8) $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$

9) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$

10) $f(x) = x + \sqrt{2 - x^2}$

Bài 2: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số:

1) $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$

4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

2) $y = \cos^2 2x - \sin x \cdot \cos x + 4$

5) $y = \sin^{20} x + \cos^{20} x$

3) $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ với $x \in [0; \pi]$

6) $y = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^2 - 3\sin 2x + 1$

Bài 3: (ĐHKT Hà Nội - 1998)

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức: $A = \frac{2\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$

Bài 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$

1) Khảo sát sự biến thiên và tìm các điểm cực trị của hàm số.

2) Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = -\sin 3x - 3\sin^3 x$

Bài 5: Giả sử x, y thay đổi thỏa mãn $x \geq 0; y \geq 0$ và $x + y = 1$.

Hãy tìm GTLN, GTNN của biểu thức:

1) $P = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$

2) $M = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$

Bài 6: Gọi $x_1; x_2$ là các nghiệm của pt: $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$.

Tìm m sao cho: $S = x_1^3 + x_2^3$ đạt GTLN, GTNN.

Bài 7: Giả sử $(x; y)$ là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Tìm a để $P = x \cdot y$ nhỏ nhất.

Bài 8: Tìm m để bất phương trình $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$ có nghiệm?

Bài 9: Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình:

$$mx^4 - 4x + m \geq 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x.$$

Bài 10: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx - 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất

phương trình $f(x) \leq \frac{1}{x^3}$ được thỏa mãn $\forall x \geq 1$.

§4: CÁC ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

1) $y = \frac{x-2}{3x+2}$

4) $y = \frac{x^2-3x+4}{2x+1}$

2) $y = \frac{-2x-2}{x-3}$

5) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$

3) $y = x + 2 - \frac{1}{x-3}$

6) $y = \frac{x}{x^3+1}$

Bài 2: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

1) $y = \frac{2x-1}{x^2} + x - 3$

5) $y = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$

2) $y = \frac{x^3+2}{x^2-2x}$

6) $y = \frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$

3) $y = \sqrt{x^2-1}$

7) $y = 2x + \sqrt{x^2-1}$

4) $y = x + \sqrt{x^2+1}$

8) $y = \sqrt{x^2+x+1}$

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + (2a+1)x + a+3}{x+2}$ với $a \neq -1$ và $a \neq 0$.

CMR: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định.

Bài 4: Cho hàm số $y = \frac{(m-1)(x^2 - 2x) + m + 4}{mx + m}$ với $m \neq -\frac{1}{4}$; $m \neq 0$

CMR: Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận cố định, còn đường tiệm cận thứ hai luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$

Bài 6: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

Bài 7: Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

Bài 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$. Tìm m để tiệm cận xiên của hàm số tạo với các trục tọa độ tam giác có diện tích bằng 18.

§5: ĐIỂM UỐN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

- 1) CMR: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn I làm tâm đối xứng
- 2) CMR: Tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số có hệ số nhỏ nhất nếu $a > 0$ và hệ số góc lớn nhất nếu $a < 0$ trong các tiếp tuyến của đồ thị.
- 3) CMR: Nếu đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm cách đều nhau thì điểm uốn nằm trên trục hoành.

Bài 2: Cho hàm số: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

- 1) CMR: Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
- 2) CMR: Không có bất cứ tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua I.

Bài 3: CMR: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ nhận giao điểm I của 2 đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Bài 4: Tìm a, b để :

- 1) đồ thị của hàm số $y = x^3 - ax^2 + x + b$ nhận điểm (1;1) là điểm uốn.
- 2) đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + x + 1$ nhận I(1; -2) làm điểm uốn của đồ thị.

Bài 5: Tìm a để đồ thị của hàm số $y = x^4 - ax^2 + 3$

- a) Có 2 điểm uốn
- b) Không có điểm uốn

Bài 6: CMR đường cong $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ có 3 điểm uốn cùng nằm trên một đường thẳng. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm uốn.

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2}{x - 2m}$

- 1) Khảo sát sự biến thiên và tìm các điểm cực trị của hàm số khi $m = 2$
- 2) Tìm m để đồ thị hàm số nhận điểm $I(1;1)$ làm tâm đối xứng.

Bài 8: CMR: Đồ thị hàm số sau có 3 điểm uốn thẳng hàng.

$$1) y = \frac{x-1}{x^2-2x+2} \quad 2) y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

Bài 9: Tìm điểm uốn của đồ thị các hàm số sau:

$$\begin{aligned} 1) y &= x^3 - 9x^2 + 2x - 3 & 4) y &= \sqrt{1+x^2} \\ 2) y &= 2x^4 - 6x^2 + 5 & 5) y &= \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} \\ 3) y &= 3x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 2 \end{aligned}$$

Bài 10: CMR Các điểm uốn của đồ thị hàm số $y = x \sin x$ nằm trên đường cong (C) có phương trình: $y^2(4+x^2) = 4x^2$.

§6: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 4$

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm uốn.
- c) Chứng minh rằng điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị

Bài 2: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

b) Tùy theo các giá trị của m , hãy biện luận số nghiệm của phương trình:

$$-x^3 + 3x^2 - 1 = m.$$

Bài 3: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số sau:

$$\begin{aligned} a) y &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3} & b) y &= -x^3 - 3x + 1 \\ c) y &= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - \frac{2}{3} & d) y &= x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \\ e) y &= x^4 - 3x^2 + 2 & f) y &= -x^4 - 2x^2 + 1 \\ g) y &= -\frac{x^4}{2} + 3x^2 + \frac{5}{2} & h) y &= x^4 + x^2 + 2 \end{aligned}$$

Bài 4: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số: $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

b) Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:
 $-x^4 + 2x^2 - 2 = m$

c) Viết phương trình tiếp tuyến tại các điểm uốn của đồ thị.

Bài 5: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 1$

b) Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:
 $x^3 - 3x^2 + m + 2 = 0$

Bài 6: Cho hàm số $y = (x + 1)(x^2 + 2mx + m + 2)$

a) Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = -1$.

Bài 7: Cho hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị với $m = 2$.

b) CMR : đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua 2 điểm cố định với mọi m.

Bài 8: Cho hàm số: $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$

a) Tìm các giá trị của m sao cho hàm số có ba cực trị

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = \frac{1}{2}$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại hai điểm uốn

Bài 9: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{x-2}{2x+1}$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của nó.

Bài 10: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$

b) $y = \frac{2x+1}{1-3x}$

c) $y = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$

d) $y = \frac{2x^2-x+1}{1-x}$

e) $y = \frac{x-2}{2x+1}$

f) $y = y = \frac{x+2}{x+3}$

Bài 11: a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x^2+5x+4}{x+2}$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Tùy theo các giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình:

$$\frac{2x^2+5x+4}{x+2} + m = 0$$

Bài 12: a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số: $y = \frac{x+2}{2x+1}$

b) CMR: đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định của

đường cong (H) khi m biến thiên.

c) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong (H) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của (H).

Bài 13: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 - bx}{x - 1}$

a) Tìm a và b biết rằng đồ thị (C) của hàm số đã cho đi qua điểm A $\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại điểm O (0;0) có hệ số góc bằng -3

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị của a và b đã tìm được.

Bài 14: a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$

b) Với các giá trị nào của m đường thẳng $y = m - x$ cắt đồ thị của hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt?

c) Gọi A và B là hai giao điểm đó. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m biến thiên.

Bài 15: Chứng minh rằng các đồ thị của hai hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x$ và $g(x) = \frac{3x}{x+2}$ tiếp xúc với nhau. Xác định tiếp điểm của hai đường cong trên và viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại điểm đó.

PHẦN II : BÀI TẬP HÌNH HỌC 12

I- HÌNH KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH

Bài 1:

- Hãy chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện
- Hãy chia một khối tứ diện thành bốn khối tứ diện bằng hai mặt phẳng.

Bài 2: Hãy chia một khối hộp thành năm khối tứ diện

Bài 3: Cho ba đường thẳng đôi một song song nhưng không đồng phẳng a, b, c trên a, b, c lần lượt lấy các đoạn AA', BB', CC' thỏa mãn $AA' < BB' < CC'$. Hãy chia hình đa diện ABCA'B'C thành một chóp và một hình lăng trụ.

Bài 4: Nếu các cạnh của khối tứ diện đều có trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều

Bài 5: Nếu các cạnh của khối tứ diện tăng lên k lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần.

Bài 6: Ba kích thước của khối hộp tăng lên k lần thì thể tích của nó tăng lên bao nhiêu lần.

Bài 7: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a cạnh bên bằng 2a.

- Tính thể tích của khối chóp
- Tính diện tích xung quang ($S_{xq} =$ tổng diện tích mặt bên)

Bài 8: Cho hình chóp tam giác đều SABCD. Cạnh đáy bằng 2a góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° .

Hãy tính thể tích của khối chóp.

Bài 9: Cho khối tứ diện đều ABCD và M là điểm trong của nó. Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ M đến các mặt của khối tứ diện không phụ thuộc vào vị trí của M bên trong khối tứ diện đó.

Bài 10: Cho hình chóp S.ABCD. Đáy ABCD là hình vuông cạnh bên SA $\perp$ (ABC); SA = a

- CMR: SAC, SBC là các tam giác vuông bằng nhau
- Tính diện tích tam giác SAC; thể tích khối tứ diện SBCE.

Bài 11: Cho hình chóp đều SABCD có cạnh đáy AB = a và góc $\widehat{SAB} = \alpha$. Hãy tính thể tích của khối chóp theo a và α .

Bài 12: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. I là trung điểm B'C'. Tính thể tích khối lập phương biết AI = 7.

Bài 13: Cho lăng trụ tam giác ABC.C'B'C'. Đáy ABC là tam giác đều cạnh a góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° . Hình chiếu H của A lên mặt (A'B'C') trùng với trung điểm của B'C'.

- Tính thể tích của khối lăng trụ.
- Tính diện tích mặt trên BCC'B'

Bài 14: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm ABC . Cạnh bên AA' tạo với đáy góc 60°

- Tính thể tích của khối lăng trụ
- Chứng minh mặt bên $BCC'B'$ là một hình chữ nhật.
- Tính tổng diện tích các mặt bên của khối lăng trụ.

Bài 15: Cho chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy lớn $2a$ cạnh đáy nhỏ là a góc giữa đường cao với mặt bên là 30°

- Tính tổng diện tích các mặt của hình chóp cụt.
- Tính thể tích khối chóp cụt.

Bài 16: Một khối chóp cụt tứ giác đều cạnh đáy lớn là a cạnh đáy nhỏ là b ($a > b$). Tính thể tích của khối chóp cụt biết diện tích xung quang của hình chóp cụt bằng tổng diện tích của hai đáy.

Bài 17: Cho hình chóp $S.ABCD$. Đáy là một nửa lục giác đều $ABCD$ nội tiếp đường kính AB , mặt chéo SAC là tam giác vuông cân tại S với $SA = SC = a$ và mặt $(SAC) \perp (ABC)$. Hãy tính thể tích của khối chóp theo a .

Bài 18: S_x, S_y, S_z là ba tia không đồng phẳng. Trên S_x lấy A, A' (khác S), trên S_y lấy B, B' (khác S), trên S_z lấy C, C' (khác S). Gọi V là thể tích khối tứ diện $S.ABC$. V' là thể tích khối tứ diện $SA'B'C'$

$$\text{CMR. } \frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$$

Bài 19: Cho chóp $S.ABC.G$ là trọng tâm $\triangle SAB$

- Dựng thiết diện MNP qua G và song song với (ABC)

$$2. \text{ Tính tỷ số: } \frac{V_{SABC}}{V_{SMNP}} = \frac{SA}{SM} \cdot \frac{SB}{SN} \cdot \frac{SC}{SP} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

II. MẶT CẦU

Bài 1: Có bao nhiêu mặt cầu đi qua một đường tròn cho trước? Tìm quỹ tích tâm các mặt cầu đó?

Bài 2: Có bao nhiêu mặt cầu cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác. Tìm quỹ tích tâm các mặt cầu đó.

Bài 3: Cho chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy là a , cạnh bên là $2a$.

Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Bài 4: Cho hình chóp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $AB = m, AD = n, AA' = p$.

CMR: Tám đỉnh của hình hộp cùng nằm trên một mặt cầu;

Tính bán kính của mặt cầu đó.

Bài 5: Cho tứ diện $OABC$ vuông tại O ; $OA = a, OB = b, OC = c$.

Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B $SA \perp (ABC)$; $AB = BC = 1/2AD = a$; $SA = a$.

Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S. CDI (với I là trung điểm của AD).

Bài 7: Một hình tứ diện có các cạnh đối bằng nhau. Chứng minh rằng tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện chính là trọng tâm của tứ diện.

Bài 8: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và $SA \perp (ABC)$; M, N, P lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC, SD.

a) CMR: A, M, N, P đồng phẳng.

b) CMR: Bảy điểm A, B, C, D, M, N, P cùng nằm trên một mặt cầu.

Bài 9: Trong mặt phẳng (P) cho hai điểm A, B. Trên đường vuông góc với mặt (P) tại A lấy C sao cho $AB = AC = a$.

a) CMR: Có một mặt cầu (S) đi qua C và tiếp xúc với (P) tại B.

b) Xác định tâm và tính bán kính của (S)

Bài 10: Trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ lấy điểm C bất kỳ. Từ C kẻ $CH \perp AB$ (H thuộc đoạn AB), I là trung điểm CH. Trên tia Ix vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I lấy điểm S sao cho $\widehat{ASB} = 90^\circ$

a) CMR: $\triangle ABC = \triangle ABS$

b) CMR: Khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho thì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABI chạy trên đường thẳng có định.

c) Cho $AH = x$. Tìm tâm và tính bán kính của mặt cầu SABI.

III. GIỚI TIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI ĐẠI HỌC(1997 - 2000)

Bài 1: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a có tâm O. Trên các nửa đường thẳng Ax, Cy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía đối với (P) lấy lần lượt hai điểm M, N. Đặt $AM = x$, $CN = y$.

a) Tính độ dài MN. Từ đó chứng minh rằng điều kiện ắt có và đủ để tam giác OMN vuông tại O là $xy = \frac{a^2}{2}$

b) Giả định M, N thay đổi sao cho tam giác OMN vuông tại O. Tính thể tích tứ diện BDMN. Xác định x, y để thể tích tứ diện này bằng $\frac{a^3}{4}$.

Bài 2: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm AB. Qua I dựng đường vuông góc với mặt phẳng (ABC) và trên đó lấy điểm S sao cho

$$SI = a\sqrt{3}.$$

a) Chứng minh rằng tam giác SAD là tam giác vuông.

b) Tính thể tích khối chóp SADC rồi suy ra khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' và điểm M trên cạnh AD. Mặt phẳng (A'BM) cắt đường chéo AC' và hình hộp tại điểm H.

a) Chứng minh rằng khi M thay đổi trên cạnh AD thì đường thẳng MH cắt đường thẳng A'B tại một điểm cố định.

b) Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện tạo bởi mặt phẳng (A'BM) cắt hình hộp trong trường hợp M là trung điểm của cạnh AD.

c) Giả định $AA' = AB$ và MB vuông góc với AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (A'BM) vuông góc với AC' và điểm H là trực tâm của tam giác A'BM.

Bài 4: Cho hình chóp SABC, $SA = x$, $BC = y$, các cạnh còn lại đều bằng 1.

a) Tính thể tích khối chóp theo x, y.

b) Với x, y nào thì thể tích khối chóp lớn nhất?

Bài 5: Cho hình vuông ABCD cạnh 2a. Trên đường thẳng (d) qua trung điểm I của cạnh AB và vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy điểm E sao cho $IE = a$. M là điểm thay đổi trên cạnh AB, hạ $EH \perp CM$. Đặt $BM = x$.

a) Chứng minh rằng điểm H di động trên một đường tròn. Tính độ dài IH.

b) Gọi J là trung điểm của đoạn CE. Tính độ dài JM và tìm giá trị bé nhất của JM.

Bài 6: Trên ba cạnh Ox, Oy, Oz của tam diện ba góc vuông Oxyz ta lần lượt lấy các điểm A, B, C với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ($a, b, c > 0$). Gọi H là hình chiếu của O xuống mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng tam giác ABC có các góc đều nhọn và H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng $S_{ABC}^2 = S_{OAB}^2 + S_{OBC}^2 + S_{OAC}^2$

c) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng bốn mặt của tứ diện OMNP là các tam giác bằng nhau. Tính thể tích tứ diện OMNP theo a, b, c.

d) Giả định a, b, c thay đổi nhưng luôn luôn thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = k$, với $k > 0$ cho trước. Khi nào thì tam giác ABC có diện tích lớn nhất? Chứng minh rằng khi đó đoạn OH cũng có độ dài lớn nhất.

Bài 7: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = h$ và $SA \perp (ABCD)$, M là một điểm thay đổi trên cạnh CD. Đặt $CM = x$.

a) Hạ $SH \perp BM$. Tính SH theo a, h và x.

b) Xác định vị trí của M để thể tích tứ diện SABH đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

Bài 8: Cho góc tam diện ba góc vuông Oxyz. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C.

a) Hãy tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) theo $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

b) Giả định điểm A cố định còn B và C thay đổi nhưng luôn thỏa mãn: $OB + OC = OA$. Hãy xác định vị trí của B và C sao cho thể tích tứ diện OABC là lớn nhất. Chứng minh rằng khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC lại là bé nhất.

Bài 9: Tính thể tích tứ diện ABCD biết $AB = a, AC = AD - BC = BD = a\sqrt{3}$

Bài 10: Trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ lấy một điểm C tùy ý. Dựng CH vuông góc với AB (H thuộc đoạn AB) và gọi I là trung điểm CH. Trên nửa đường thẳng IT vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I lấy điểm S sao cho góc $\angle ASB = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng tam giác SHC là tam giác đều.

b) Đặt $AH = h$. Tính thể tích V của tứ diện SABC theo h và R.

IV. GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỀ THI ĐH GẦN ĐÂY

Bài 1 (Khối A, A1-2014). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD) là trung điểm của cạnh

AB. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD).

Bài 2 (Khối B-2014). Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của cạnh AB. Góc giữa đt A'C và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách từ điểm B đến mp(ACC'A')

Bài 3 (Khối D-2014). Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BC.

Bài 4 (Khối A, A1-2013). Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Tam giác SBC đều cạnh a và mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

Bài 5 (Khối B-20103). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Bài 6 (Khối D-2013). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$, M là trung điểm của BC, góc $\widehat{SMA} = 45^\circ$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Bài 7 (Khối A-2012). Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho

$HA = 2HB$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a ?

Bài 8 (Khối B-2012). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC . Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH) . Tính thể tích khối chóp $S.ABH$ theo a .

Bài 9 (Khối D-2012). Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a .

Bài 10 (Khối A-2011). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB , mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a .

Bài 11 (Khối B-2011). Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a .

Bài 12 (Khối D-2011). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BA = 3a$, $BC = 4a$, mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a .

Bài 13 (Khối A-2010). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , AD ; H là giao điểm của CN và DM . Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.CDNM$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a .

Bài 14 (Khối B-2010). Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Bài 15 (Khối D-2010). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

điểm H thuộc đoạn AC ; $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC .

Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SABC theo a .

Bài 16 (Khối A-2009). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D $AB = AD = 2a$; $CD = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD , biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD .

Bài 17 (Khối B-2009). Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $BB' = a$, góc giữa BB' và mặt phẳng ABC bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích tứ diện A'ABC ?

Bài 18 (Khối D-2009). Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B $AB = a$; $AA' = 2a$; $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn A'C' , I là giao điểm của AM và A'C . Tính theo a thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .

Bài 19 (Khối A-2008). Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a Đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'

Bài 20 (Khối B-2008). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a

$SA = a$; $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , BC . Tính theo a thể tích khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM , DN .

Bài 21 (Khối D-2008). Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM , B'C .

Bài 22 (Khối A-2007). Cho hình chóp S.ABC biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° , ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a . Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC) .

Bài 23 (Khối B-2007). Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA , M là trung điểm

của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Bài 24 (Khối D-2007). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang

$$\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ,$$

$BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Bài 25 (Khối B-2006). Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{2}$; $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện ANIB.

Bài 26 (Khối D-2006). Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a $SA = 2a$ và SA vuông góc với phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB, SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

Bài 27 (Khối B-2004). Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a; góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ .

Chuyên đề : Sử dụng máy tính cầm tay để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình (Máy tính : Casio fx 570vn plus hoặc vinacal)

Chú ý : Vì hầu hết các em học sinh đã biết sử dụng các chức năng cơ bản của máy tính, nên trong chuyên đề này chúng tôi chỉ tập trung giới thiệu các kĩ thuật sử dụng máy tính cầm tay để giải phương trình, hệ phương trình và bất phương trình.

Một số phím chức năng quan trọng :

Phím SHIFT có màu gạch nó có chức năng gọi các chức năng có cùng màu như phím SETUP, SOLVE, $\frac{d}{dx}$, $\sqrt[3]{}$, nPr, nCr,....

Phím ALPHA có màu đỏ dùng để gọi các chức năng có màu đỏ (thường dùng để gọi các biến nhớ A,B,C,D,E,F,X,Y,M...

Các phương thức tính toán thường sử dụng :

Phương thức sử dụng	Cách gọi
Tính toán chung	MODE 1 (COMP)
Tính toán số phức	MODE 2 (CMPLX)
Giải hệ và phương trình	MODE 5 (EQN)
Bảng giá trị của hàm số	MODE 7 (TABLE)
Vecto	MODE 8 (VECTOR)
Giải bất phương trình	MODE ∇ (INEQ)

Thiết lập cấu hình một số phương thức thường dùng :

Bấm : SHIFT SETUP

1, 2 : Chức năng hiển thị kết quả tính toán

3,4,5 : Đơn vị độ, radian, đơn vị góc grad : thể hiện đơn vị nhập và kết quả hiển thị.

∇ 3 : CMPLX : chế độ hiển thị số phức dạng thường và dạng tọa độ cực.

∇ 5 : TABLE : chế độ bảng dành cho 1 hàm số hoặc 2 hàm số (thông thường ta chỉ dùng 1 hàm nên ta chọn chế độ 1 : f(x)).

Phần 1 : Xác định số nghiệm của phương trình .

VD1: Giải phương trình : $x^2 + 5x + 5 - \sqrt{7x+5} = (x+3)\sqrt{5x+2}$

Định hướng : Sử dụng chức năng SOLVE

Bước 1 : Nhập biểu thức $X^2 + 5X + 5 - \sqrt{7X+5} - (X+3)\sqrt{5X+2}$

Bước 2 : bấm SHIFT SOLVE (for X=0) ta được nghiệm X=-0,302775637

Lưu nghiệm : SHIFT STO A (Ans $\rightarrow$ A)

Bước 3 : nhập $\frac{X^2 + 5X + 5 - \sqrt{7X+5} - (X+3)\sqrt{5X+2}}{X - A}$, tiếp tục bấm SOLVE (

for A= giá trị nghiệm A sẽ tự hiện, for X =5) ta được nghiệm X= 3,302775638)

Bước 4 : nhập $\frac{X^2 + 5X + 5 - \sqrt{7X + 5} - (X + 3)\sqrt{5X + 2}}{(X - A)(X - B)}$, tiếp tục bấm SOLVE (

for A= giá trị nghiệm A sẽ tự hiện, for B = giá trị B sẽ tự hiện, for X =5) ta được CAN'T SOLVE

Đến đây có thể tạm kết luận 2 nghiệm là 2 giá trị trên. Tuy nhiên trong nhiều bài toán các nghiệm trên có thể là nghiệm bội 2 hoặc bội 3 và còn có thể có nghiệm khác, cách kiểm tra sẽ đề cập ở phần 2.

Đến đây cách xử lý như sau :

Ta nhập : $\sqrt{7A + 5}$ nhấn = ta được giá trị 1,697224362 nhận thấy = A + 2

$\sqrt{5A + 2}$ nhấn = ta được giá trị 0,6972243623 nhận thấy = A + 1

Bài giải: $x^2 + 5x + 5 - \sqrt{7x + 5} = (x + 3)\sqrt{5x + 2}$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(\sqrt{5x + 2} - x - 1) + (\sqrt{7x + 5} - x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 1)\left(\frac{x + 3}{\sqrt{5x + 2} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{7x + 5} + x + 2}\right) = 0 \quad (\text{biểu thức trong luôn } > 0)$$

với điều kiện $x > -\frac{2}{5}$)

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Chú ý: Cách tìm mối liên quan : $\sqrt{7A + 5} = A + 2$ có thể tìm như sau :

Ta đã lưu nghiệm vào A, dùng MODE 7 TABLE , nhập $f(X) = \sqrt{7A + 5} - AX$ với START ? -5, END? 5, STEP? 0,5. Nhìn vào bảng ta thấy với X=1 thì f(X)=2, hay ta có $\sqrt{7A + 5} - A = 2 \Rightarrow \sqrt{7A + 5} = A + 2$

VD2. Giải phương trình $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 7x - 3 = 0$

(Ví dụ này rất quan trọng vì nếu trong chương trình phổ thông phương trình chứa căn các em bình phương hai vế ta nhận được phương trình bậc 4 khi đó ta hầu như đều giải được theo cách này).

Định hướng :

Bước 1: Ta dùng chức năng TABLE : MODE 7 để cô lập khoảng chứa nghiệm.

Nhập : $f(X) = 2X^4 - 3X^3 - X^2 - 7X - 3$, bấm = , START? Bấm -5 , END? Bấm 5, STEP? Bấm 0,5 (các số liệu này tùy vào phương trình có thể chọn nhỏ đi hoặc lớn lên).

Dựa vào bảng ta thấy tại giá trị X = -0,5 thì f(X)=0,75 còn tại X=0 thì f(X) = -3, suy ra f(x)= 0 có nghiệm trong (-0,5;0), tương tự ta thấy f(x)=0 có nghiệm trong khoảng (2;2,5).

Bước 2 : ta chuyển về MODE 1 để tính toán thông thường

Nhập biểu thức $2X^4 - 3X^3 - X^2 - 7X - 3$ sau đó bấm SHIFT SOLVE for $X = 0$ (để ta lấy nghiệm trong khoảng $(-0,5;0)$) ta được nghiệm $-0,414213562$, ta gán vào biến A bằng cách nhấn : SHIFT STO A ta thấy : Ans $\rightarrow$ A. Tiếp tục nhập lại biểu thức và SOLVE nghiệm trong khoảng $(2;2,5)$ ta được nghiệm $2,414213562$ ta gán vào biến B.

Ta thấy $A+B=2$ và $A.B=-1$ suy ra A,B là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1$, vậy phương trình trên phân tích thành :

$$(x^2 - 2x - 1)(2x^2 + x + 3) = 0 \text{ từ đây suy ra 2 nghiệm là } x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Trên đây là 2 cách thường dùng để quét các nghiệm của các phương trình vô tỷ.

Phần 2 : Phân biệt nghiệm đơn, nghiệm kép và nghiệm bội 3.

1. Nghiệm đơn :

VD3 : Giải phương trình $x^3 + 4x^2 + x + 3 = 2x^2\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+13}$ (*)

(đề thi thử đợt 1 trường Nguyễn Thị Minh Khai 2016).

Định hướng : ta dùng chức năng table và solve nghiệm ta thấy có 1 nghiệm $x = 0,828427124$, ta gán vào A.

Ta xem nghiệm trên có là nghiệm bội không bằng cách tính :

$$\left. \frac{d}{dx}(x^3 + 4x^2 + x + 3 - 2x^2\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+13}) \right|_{x=A} : \text{nếu kết quả khác 0 thì kết luận}$$

là nghiệm lẻ, kết quả bằng 0 thì ta kết luận là nghiệm bội. Trong bài toán này ta thấy đó là nghiệm lẻ. Ta tính : $2\sqrt{A+5} = 4,828427124 = A+4$ và $\sqrt{2x+13} = 3,828427125 = A+3$

Bài giải : $x^2(x+4-2\sqrt{x+5}) + (x+3-\sqrt{2x+13}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2+4x-4)}{x+4+2\sqrt{x+5}} + \frac{x^2+4x-4}{x+3+\sqrt{2x+13}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x-4) \left(\frac{x^2}{x+4+2\sqrt{x+5}} + \frac{1}{x+3+\sqrt{2x+13}} \right) = 0$$

Vì VT của (*) ≥ 0 suy ra $x^3 + 4x^2 + x + 3 \geq 0 \Rightarrow (x+4)(x^2+1) > 0 \Rightarrow x > -4$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x+4+2\sqrt{x+5}} + \frac{1}{x+3+\sqrt{2x+13}} > 0$$

$$(*) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{2} \text{ (do } x > -4)$$

VD4 : Giải phương trình $5x^3 - 22x^2 + 22x - 6 + \sqrt{4x-3} = 0$

Định hướng : Dùng chức năng SOLVE hoặc TABLE ta được 2 nghiệm $x = 1$ và $x = 3$, ta thử và thấy đây là nghiệm đơn và do đó ta có nhân tử chung của phương trình trên là biểu thức : $x^2 - 4x + 3$. Do đó ta đi xử lý $\sqrt{4x-3} = ax + b$

Định hướng : Dùng chức năng SOLVE ta được nghiệm : $x = 1,618033961$, lưu nghiệm vào A.

Ta nhập biểu thức $X^2 + 3X + 2 - X\sqrt{X+1} - (X+1)\sqrt{3X+2}$

CALC với giá trị $x = A + 0,00001$ ta nhận được $2,666.10^{-11}$, tiếp tục CALC với giá trị $x = A - 0,00001$ ta được $4,0006.10^{-11}$. Vậy ta thấy 2 giá trị được tính nhận giá trị cùng dấu nên nghiệm đã lưu là nghiệm bội 2.

Ta tính : $\sqrt{A+1} = 1,618033675$ tương ứng với A : vậy ta có cách ghép $(x - \sqrt{x+1})^2$, Còn với $\sqrt{3A+2} = 2,618033407$ tương ứng với A + 1, Vậy ta có cách ghép : $(x+1 - \sqrt{3x+2})^2$ (ở đây ta viết bình phương vì nghiệm A là nghiệm bội 2 nên phải có nhân tử chung là $(x - A)^2$)

Bài giải :

Nhân 2 vào 2 vế của pt ta có :

$$2x^2 + 6x + 4 = 2x\sqrt{x+1} + 2(x+1)\sqrt{3x+2}$$

$$(x^2 - 2x\sqrt{x+1} + x+1) + [(x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{3x+2} + 3x+2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+1})^2 + (x+1 - \sqrt{3x+2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = x \\ \sqrt{3x+2} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3. Nghiệm bội 3.

VD7. Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + 3x = \sqrt{2(x^3 + x^2 - x + 1)}$

Định hướng : Dùng chức năng SOLVE ta tìm được nghiệm $x = 1$.

Sử dụng $\frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3x - \sqrt{2(x^3 + x^2 - x + 1)}) \Big|_{x=1} = 0$, suy ra $x=1$ là nghiệm bội.

Ta kiểm tra xe bội 2 hay 3. Nhập biểu thức $x^3 - 2x^2 + 3x - \sqrt{2(x^3 + x^2 - x + 1)}$

CALC với giá trị $x = 1 + 0,0001$ ta được $1,5.10^{-12}$, CALC với giá trị $x = 1 - 0,0001$ ta được giá trị $-1,5.10^{-12}$, vậy 2 giá trị nhận được là trái dấu nên nghiệm trên là bội 3. Hay nhân tử chung là $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Bài giải :

$$(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (x^2 + 1 - \sqrt{2(x^3 + x^2 - x + 1)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + \frac{(x-1)^3(x+1)}{x^2 + 1 + \sqrt{2(x^3 + x^2 - x + 1)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 \left(1 + \frac{(x+1)}{x^2 + 1 + \sqrt{2(x^3 + x^2 - x + 1)}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

VD8. Giải phương trình $2x^2 + 3 = \sqrt{x^3 + 2x^2 + 1} + \sqrt{x^3 + 4x^2 + 4}$ (*)

Định hướng : Dùng SOLVE ta được 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$,
Khảo sát nghiệm đơn và bội ta thấy $x = 0$ bội 3, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy : Nhân tử chung là $x^3(x-1) = x^4 - x^3$

Khí đó : $\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1} = ax^2 + bx + c$

(thay $x = 0$ suy ra $c = 1$, đạo hàm cấp 2 tại $x = 0$ ta được $a = 1$, thay $x = 1$ ta được $b = 0$). Vậy $\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1} = x^2 + 1$

Tương tự : $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 4} = x^2 + 2$

Bài giải : Đk

$$(x^2 + 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}) + (x^2 + 2 - \sqrt{x^3 + 4x^2 + 4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3(x-1)}{x^2 + 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}} + \frac{x^3(x-1)}{x^2 + 2 + \sqrt{x^3 + 4x^2 + 4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-1) \left(\frac{1}{x^2 + 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}} + \frac{1}{x^2 + 2 + \sqrt{x^3 + 4x^2 + 4}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Phần 3 : Dùng máy tính để tìm mối liên hệ x, y trong hệ phương trình.

VD9. Giải hệ $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$

Định hướng : Từ $xy + x + y = x^2 - 2y^2$

Cho $Y = 100$, ta nhập vào máy phương trình : $100X + X + 100 = X^2 - 2.100^2$
bấm SOLVE nghiệm ta được $X = -100$. Ta nhận thấy $x + y = 0$ nên ta sẽ có NTC là $x + y$

Bài giải : $xy + x + y = x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow x(x + y) + x + y = 2(x^2 - y^2)$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x - 2y - 1) = 0$$

Phần còn lại các em tự xử lý

VD10 Giải hệ $\begin{cases} x^2 - y^2 + 5x - y + 6 = 0 \\ 2x^2 - 2xy + y^2 - 2 = \sqrt{6x + 7} + 2\sqrt{x + y + 1} \end{cases}$

Định hướng : Từ $x^2 - y^2 + 5x - y + 6 = 0$

Cho $Y = 100$ ta nhập phương trình : $X^2 - 100^2 + 5X - 100 + 6$ Bấm SOLVE
nghiệm ta được $X = 98$ hoặc $X = -103$

Ta nhận thấy NTC là : $x - y + 2$ hoặc $x + y + 3$

Bài giải :

$$x^2 - y^2 + 5x - y + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x - y + 2) + y(x - y + 2) + 3(x - y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 2)(x + y + 3) = 0$$

Phần còn lại các em tự xử lý.

VD11. Giải hệ
$$\begin{cases} x^3 - 2y^3 + 3(x - 2y) = 3xy(x - y) \\ 2x^3 = (1 + 4y - 3x^2)\sqrt{2x + 1} \end{cases}$$

Định hướng: Từ $x^3 - 2y^3 + 3(x - 2y) = 3xy(x - y)$

Cho $Y = 100$, ta nhập phương trình $X^3 - 2.100^3 + 3(X - 200) - 300X(X - 100)$ bấm SOLVE ta được $X = 200$. Hay dự đoán NTC là $x = 2y$.

Bài giải:

$$x^3 - 2y^3 + 3(x - 2y) = 3xy(x - y)$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 2x^2y) - (x^2y - 2xy^2) + (xy^2 - 2y^3) + 3(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)(x^2 - xy + y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 2y$$

VD12 Giải hệ
$$\begin{cases} 2(y^3 + 2y - x - 1) = y^2(x + 1) \\ x\sqrt{x^2 + 2y + x + 1} + 4y + x + 1 = 0 \end{cases}$$

Định hướng: Từ $2(y^3 + 2y - x - 1) = y^2(x + 1)$

Cho $Y = 100$, ta nhập biểu thức $2(100^3 + 200 - X - 1) - 100^2(X + 1)$ bấm SOLVE ta được $X = 199$, Dự đoán NTC là: $x = 2y - 1$

Bài giải: $2(y^3 + 2y - x - 1) = y^2(x + 1)$

$$\Leftrightarrow y^2(x - 2y + 1) + 2(x - 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y + 1)(y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 1$$

Thay $x = 1$ và $x = 3$ ta được hệ $\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0$.

vậy nhân tử của căn là: $x - \sqrt{4x - 3}$

Bài giải: $(5x^3 - 22x^2 + 23x - 6) - (x - \sqrt{4x - 3}) = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)\left(5x - 2 - \frac{1}{x + \sqrt{4x - 3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)\left(\frac{5x^2 - 2x - 1 + (5x - 2)\sqrt{4x - 3}}{x + \sqrt{4x - 3}}\right) = 0$$

$$(\text{vì } x > \frac{3}{4} \Rightarrow 5x - 2 > 0; 5x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{5x^2 - 2x - 1 + (5x - 2)\sqrt{4x - 3}}{x + \sqrt{4x - 3}} > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 1; x = 3$$

2. Nghiệm kép

VD5: Giải phương trình: $x^3 - 2x^2 + 4x - 1 = \sqrt{4x - 3} + \sqrt[3]{3x - 2}$

Định hướng: Dùng chức năng solve nghiệm ta được nghiệm $x = 1$.

$$\text{Dùng } \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 4x - 1 - \sqrt{4x - 3} - \sqrt[3]{3x - 2}) \Big|_{x=1} = 0$$

Suy ra $x = 1$ là nghiệm bội. Ta sẽ kiểm tra xem đây là bội 2 hay bội 3 bằng cách như sau: ta nhập biểu thức $x^3 - 2x^2 + 4x - 1 - \sqrt{4x - 3} - \sqrt[3]{3x - 2}$ và nhấn CALC với giá trị là $1 + 0,00001$ ta được $4 \cdot 10^{-10}$, tiếp tục CALC với giá trị $1 - 0,00001$ ta được $4 \cdot 10^{-10}$ tức hai giá trị này cùng dấu thì ta nhận xét đây là nghiệm bội chẵn. Trong chương trình phổ thông thì nghiệm bội chẵn ta chỉ xét đến bậc 2.

Vậy nhân tử chung sẽ là: $(x - 1)^2$

Cách xử lý liên hợp: $\sqrt{4x - 3} = ax + b$ (*)

Trong đó: $a = \frac{d}{dx}(\sqrt{4x - 3}) \Big|_{x=1} = 2$, thay $x = 1$ vào (*) ta được $a + b = 1 \Rightarrow b = -1$

Vậy $\sqrt{4x - 3} = 2x - 1$ Tương tự: $\sqrt[3]{3x - 2} = x$

Bài giải:

$$x^3 - 2x^2 + x + (2x - 1 - \sqrt{4x - 3}) + (x - \sqrt[3]{3x - 2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1)^2 + \frac{4(x - 1)^2}{2x - 1 + \sqrt{4x - 3}} + \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{x^2 - x\sqrt[3]{3x - 2} + (\sqrt[3]{3x - 2})^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 \left(x + \frac{4}{2x - 1 + \sqrt{4x - 3}} + \frac{(x + 2)}{x^2 - x\sqrt[3]{3x - 2} + (\sqrt[3]{3x - 2})^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

VD6. Giải phương trình $x^2 + 3x + 2 = x\sqrt{x + 1} + (x + 1)\sqrt{3x + 2}$